Im Grenzfall $l = |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_s| = 0$ wird dies eine unendliche Konstante, die weggelassen werden muß.

Anhang III

Wir benutzen die Bezeichnungsweise von (5.19), lassen jedoch den Index 1 von c_1 fort. Die algebraische Zahl $\cos \pi/7 = c_1 = c$ genügt neben ihrer Gleichung 7. Grades noch einer Gleichung 3. Grades:

$$c^3 = \frac{1}{2} c^2 + \frac{1}{2} c - \frac{1}{8} . \tag{III.1}$$

Dies kann benutzt werden, um einen Zahlkörper mit rationalen Koeffizienten zur Reduktion aller Potenzen von c auf die erste und zweite aufzubauen, z. B.

$$\begin{aligned} c^4 &= \frac{1}{2} c^3 + \frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{8} c \\ &= \frac{3}{4} c^2 + \frac{1}{8} c - \frac{1}{16} . \end{aligned} \tag{III.2}$$

Entsprechend hat man

$$\begin{aligned} c_2 &= 2 c^2 - 1 , \\ c_3 &= 2 c^2 - c - \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{III.3}$$

usw. Auch s_1 läßt sich an dieses Schema anschließen durch

$$s_1 = (4 c^2 + c - 3)/\sqrt{7} . \tag{III.4}$$

Es folgt

$$s_2 = (6 c^2 - 2 c - 1)/\sqrt{7} , \tag{III.5}$$

$$s_3 = (-2 c^2 + 3 c + 3/2)/\sqrt{7}$$

und z. B.

$$s_1 s_2 s_3 = \sqrt{7}/8 . \tag{III.6}$$

Versuch einer stark idealisierten Theorie der Hyperonen

Von G. Heber

Aus dem Theoretisch-Physikalischen Institut der Universität Jena

(Z. Naturforschg. **10a**, 103—109 [1955]; eingegangen am 10. November 1954)

Ein skalares, reelles, relativistisches Materiefeld (Mesonen) wird skalar an ein skalares, nichtrelativistisches Materiefeld (Nukleon) gekoppelt. Bei Behandlung der quantisierten Felder mit der Tomonagaschen Methode für mittelstarke Kopplungen erhält man bekanntlich Isobaren-Zustände für 1 Nukleon. Versuchsweise werden diese angeregten Zustände des Nukleons mit den Hyperonen identifiziert. Dabei ergibt die Theorie größenordnungsmäßig das beobachtete Massenspektrum der Hyperonen, aber die Lebensdauer der angeregten Nukleonen-Zustände wird viel zu klein. Mögliche Ursachen dieser Diskrepanz werden besprochen.

Hyperonen nennt man bekanntlich diejenigen Elementarteilchen, deren Ruh-Massen zwischen der des Neutrons und der des Deuterons liegen. Zuverlässig festgestellt sind bisher[1] drei Typen von Hyperonen:

1. Ein neutrales Teilchen Λ^0 der Masse $M_{\Lambda^0} = (2182 \pm 2)\, m_e$ (m_e Elektronenmasse). Dieses Hyperon zerfällt mit der Halbwertszeit $\tau \approx 3 \cdot 10^{-10}$ sec in ein Proton und ein π-Meson: $\Lambda^0 \rightarrow \mathrm{P} + \pi^-$.
2. Ein negatives Teilchen Σ^- der Masse $M_\Sigma = 2570\, m_e$, welches in das Hyperon Λ^0 und ein π-Meson zerfällt: $\Sigma^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$.
3. Ein elektrisch positiv oder negativ geladenes Hyperon, dessen Masse $M_\Omega = 2940\, m_e$ beträgt und das in ein Nukleon (Proton oder Neutron) und ein π-Meson zerfällt.

Ferner ist beobachtet worden, daß Hyperonen entstehen, wenn π-Mesonen geeigneter Energie auf Protonen oder auch auf Atomkerne treffen.

Diese Tatsachen legen die Vermutung nahe, daß die oben genannten Hyperonen keine wirklichen Elementarteilchen, sondern Gebilde sind, welche irgendwie aus einem Nukleon und π-Mesonen zusammengesetzt sind.

Theoretisch erscheint diese Vermutung durchaus nicht abwegig; denn daß die Nukleonen Quellen des π-Mesonfeldes sind, wird wohl allgemein akzeptiert. Das bedeutet aber, daß jedes Nukleon in seiner nächsten Umgebung ein π-Meson-Feld besitzt, ähnlich wie jedes elektrisch geladene Teilchen sein elektrisches Eigenfeld erzeugt. Die Existenz dieses Mesonen-Eigenfeldes bedeutet im Teilchenbild die Anwesenheit einer π-Mesonen-Wolke in der Umgebung des Nukleons. Diese Mesonen des Eigenfeldes kann man dem Nukleon nicht nehmen, wie man ja auch das elektrische Eigenfeld eines Teilchens nicht ändern kann. Was wir empirisch als Nukleon beobachten, ist das nackte Nukleon einschließlich seiner π-Mesonen-Wolke. Es ist aber

[1] Ich stütze mich hier auf den Vortrag von Herrn Prof. Powell anläßlich des Hamburger Physikertages 1954 mit dem Titel: „Heavy Mesons and Excited Nucleons.“ S. auch: C. F. Powell, Nature, Lond. **173**, 469 [1954].

Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition “no derivative works”). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

möglich, dieser Mesonen-Wolke 1, 2 oder mehr Mesonen hinzuzufügen. Man erhält dann angeregte Zustände dieser Mesonen-Wolke und damit angeregte Zustände des Nukleons. Solche Zustände möchte man zumindest versuchsweise mit den Hyperonen identifizieren.

Quantitativ ergaben sich angeregte Zustände der Nukleonen schon mittels der Näherungs-Methode der „starken Kopplung“[2], während in der Näherung der „schwachen Kopplung“ (Entwicklung nach Potenzen der Kopplungskonstanten) derartige Zustände nicht auftraten. — In Wirklichkeit ist allerdings die Kopplung der Mesonen an die Nukleonen höchstwahrscheinlich weder stark noch schwach, sondern mittelstark. Also dürfte das geeignete Hilfsmittel zur Diskussion dieses Phänomens die Tomonagasche Methode zur Behandlung mittelstark gekoppelter Felder[3] sein. Auch in dieser Näherung treten angeregte Zustände auf, wie am Beispiel des pseudoskalaren Mesonfeldes Harlow und Jacobsohn gezeigt haben[4]. Die genannten Autoren berechneten die Energien der tiefsten angeregten Zustände für verschiedene Kopplungsstärken und verschiedene Nukleonen-Strukturen, was leider nur auf numerischem Wege möglich ist. Die zugehörigen Lebensdauern wurden nicht diskutiert.

Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es zu zeigen, welche Eigenschaften die angeregten Zustände der Nukleonen in einem vereinfachten, dafür aber weitgehend streng und ohne numerische Rechnungen durchzuführenden Modell besitzen. Die Vereinfachungen bestehen in folgendem:

1. Spin und Verschiedenheit der elektrischen Ladung der Nukleonen wurden nicht beachtet: die Nukleonen werden durch ein skalares, nichtrelativistisches Feld ψ beschrieben.

2. Die π-Mesonen werden durch ein skalares, reelles, relativistisches Feld U dargestellt, welches skalar an das Nukleonen-Feld gekoppelt ist. Nur elektrisch neutrale π-Mesonen werden also zugelassen.

Nach diesen Vereinfachungen gelingt es mit Hilfe der erwähnten Tomonagaschen Methode, in recht übersichtlicher Weise die interessierenden Größen, vor allem die Energien (Massen) und Lebensdauern der angeregten Zustände der Nukleonen zu berechnen. Das Massenspektrum kommt größenordnungsmäßig richtig heraus, während die Theorie eine viel zu kleine Lebensdauer liefert. Man könnte vermuten, daß diese Diskrepanz vor allem in der Vernachlässigung von Spin und elektrischer Ladung der Nukleonen ihre Ursache hat.

§ 1. Feldgleichungen, Hamilton-Operator und dessen Erwartungswert

Genau wie in § 3 von M sollen hier die Feldgleichungen

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\hbar}{2\lambda}\Delta\psi=g\,U\psi;\qquad(\Box-\mu^2)\,U=-g\,\psi^*\psi \tag{1}$$

zugrunde gelegt werden. Wie dort stellen wir den zugehörigen Hamilton-Operator in folgender Form dar:

$$H=H_0+H_{\mathrm{Qu}}+H' \tag{2}$$

mit

$$H_0=\frac{\hbar}{2}\sum_{\mathfrak{k}}\omega_{\mathfrak{k}}\,(2\,a_{\mathfrak{k}}^*\,a_{\mathfrak{k}}+1),\quad \omega_{\mathfrak{k}}=c\,(\mu^2+\mathfrak{k}^2)^{1/2}, \tag{2a}$$

$$H_{\mathrm{Qu}}=\sum_{\mathfrak{p}}b_{\mathfrak{p}}^*\,b_{\mathfrak{p}}\cdot E_{\mathfrak{p}},\quad E_{\mathfrak{p}}=\frac{\hbar}{2\lambda}\,\mathfrak{p}^2, \tag{2b}$$

$$H'=\sum_{\mathfrak{k}}f(\mathfrak{k})\,(a_{\mathfrak{k}}+a_{-\mathfrak{k}}^*),$$

$$f(\mathfrak{k})=-g\left(\frac{\hbar\,c^2}{2V\omega_{\mathfrak{k}}}\right)^{1/2}\int e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\,\psi^*(\mathfrak{r})\,\psi(\mathfrak{r})\,d^3\mathfrak{r}. \tag{2c}$$

$\hbar\mathfrak{k}$ und $\hbar\mathfrak{p}$ sind die Impulse der Mesonen bzw. nackten Nukleonen. $a_{\mathfrak{k}}$, $a_{\mathfrak{k}}^*$ und $b_{\mathfrak{p}}$, $b_{\mathfrak{p}}^*$ sind die Koeffizienten aus der Entwicklung der Operator-Funktionen U bzw. ψ nach den Eigenfunktionen der zugehörigen ungekoppelten ($g=0$) Feldgleichungen. Die $a_{\mathfrak{k}}$ und $b_{\mathfrak{p}}$ sind in bekannter Weise Vernichtungs-Operatoren bezüglich der betreffenden Teilchensorte, die $a_{\mathfrak{k}}^*$ und $b_{\mathfrak{p}}^*$ die zugehörigen Erzeugungsoperatoren. In der Tomonaga-Näherung wird, wie in M ausführlich erläutert, die Annahme

$$a_{\mathfrak{k}}=A\cdot\varphi\,(\mathfrak{k}) \tag{3}$$

gemacht (A Vernichtungsoperator, $\varphi(\mathfrak{k})$ gewöhnliche Funktion von $\mathfrak{k}$; entsprechend für $a_{\mathfrak{k}}^*$).

Wie in § 4 von M bilden wir den Erwartungswert von H gemäß (2) bezüglich eines Zustands-

[2] Siehe etwa: W. Pauli, Meson Theory of Nuclear Forces, New York und London 1948, S. 11 ff. Dort findet man auch Zitate der wesentlichen Originalarbeiten.

[3] S. Tomonaga, Progr. Theor. Phys. **2**, 6 [1947]; die hier verwendeten Formeln sind zusammengestellt bzw. abgeleitet bei G. Heber, Ann. Phys. Lpz., im Druck; besonders §§ 3 und 4. Dort auch weitere Literaturangaben. Letztere Arbeit wird künftig zitiert als M.

[4] F. Harlow u. A. Jacobsohn, Phys. Rev. **93**, 333 [1954].

vektors Ψ in dem durch die Operatoren A, A^*; $b_\mathfrak{p}$, $b_\mathfrak{p}^*$ definierten Hilbert-Raum vom Typ

$$\Psi = \sum_n \sum_\mathfrak{p} c_n \, a_{\mathfrak{p}+n\mathfrak{K}} \cdot \Phi_n \cdot \Theta_\mathfrak{p}. \tag{4}$$

Φ_n sei in (4) der zum Vorhandensein von n Mesonen gehörige Zustandsvektor, $\Theta_\mathfrak{p}$ die entsprechende Größe für 1 Nukleon mit dem Impuls $\hbar\mathfrak{p}$. Bei der in M vorausgesetzten Normierung ist dann $c_n^* c_n$ die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von n Mesonen, $a_\mathfrak{p}^* a_\mathfrak{p}$ aber die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das nackte Nukleon den Impuls $\hbar\mathfrak{p}$ besitzt [5]. — Der Einbau der Größe $\mathfrak{K}$ in (4) garantiert, wie in M gezeigt, die Erhaltung des Gesamtimpulses bei Emission oder Absorption eines Mesons durch das Nukleon. Wir wollen allerdings im folgenden voraussetzen, daß $\mathfrak{K}=0$ sei. Dies bedeutet, daß der Gesamtimpuls von Nukleon und Mesonwolke Null ist. Dann ergibt sich der folgende Erwartungswert (vgl. M):

$$W = \langle \Psi, H\Psi \rangle = \overline{W}_0 + E_0 + \sum_{n=0}^{\infty} [c_n^* c_n \cdot \overline{W} \cdot n + c_{n+1}^* c_n \sqrt{n+1}\, \beta' + c_{n-1}^* c_n \sqrt{n}\, \beta'^*] \tag{5}$$

mit $\overline{W}_0 = \frac{\hbar}{2} \sum_\mathfrak{k} \omega_\mathfrak{k}$; $\quad E_0 = \sum_\mathfrak{p} E_\mathfrak{p} \cdot a_\mathfrak{p}^* a_\mathfrak{p}$;

$$\overline{W} = \hbar \sum_\mathfrak{k} \omega_\mathfrak{k} \, \varphi^*(\mathfrak{k}) \, \varphi(\mathfrak{k}); \tag{5a}$$

$$\beta' = -g \sum_\mathfrak{k} \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_\mathfrak{k}}\right)^{1/2} \varphi^*(-\mathfrak{k}) \cdot F(\mathfrak{k});$$

$$F(\mathfrak{k}) = \sum_\mathfrak{p} a_\mathfrak{p}^* a_{\mathfrak{p}-\mathfrak{k}}. \tag{5b}$$

§ 2. Eigenwerte und Eigenfunktionen des Hamilton-Operators

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Hamilton-Operators (2) werden mittels des Variationsverfahrens bestimmt. Es sind also die Extremalwerte von W nach (5) zu suchen. Als zu variierende Größen sind dabei die Koeffizienten c_n aus (4) und die Funktion $\varphi(\mathfrak{k})$ aus (3) zu betrachten, während das Koeffizientensystem $a_\mathfrak{p}$ in (4) als vorgegeben angenommen wird.

Das Variationsproblem bezüglich der c_n läßt sich, wie z. B. in M gezeigt, streng lösen und liefert die Eigenwerte W_ν von W

$$W_\nu = \overline{W}_0 + E_0 + \nu \overline{W} - \frac{\beta'^* \beta'}{\overline{W}}; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Die zugehörigen „Eigenfunktionen“ c_n^ν sind

$$c_n^\nu = e^{-\beta^*\beta/2} \cdot (n!\,\nu!)^{1/2} (-\beta^*)^{n-\nu} \sum_{\lambda=\lambda_0}^{\nu} \frac{(-\beta^*\beta)^\lambda}{\lambda!\,(\lambda+n-\nu)!\,(\nu-\lambda)!} \tag{7}$$

mit $\lambda_0 = \begin{cases} 0 & \text{für } n \geqq \nu \\ \nu - n & \text{für } n \leqq \nu \end{cases}$ und $\beta = \beta'^*/\overline{W}$; $\beta^* = \beta'/\overline{W}$.

Man kann sich davon überzeugen, daß die „Funktionen“ (7) normiert und orthogonal zueinander sind:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{\nu*} c_n^\mu = \delta_{\nu,\mu}. \tag{8}$$

Die ersten drei Koeffizientensysteme lauten explizit

$$c_n^0 = \frac{(-\beta^*)^n}{(n!)^{1/2}} e^{-\beta^*\beta/2};$$

$$c_n^1 = \frac{(-\beta^*)^n}{(n!)^{1/2}} \left[-\beta + \frac{n}{\beta^*}\right] e^{-\beta^*\beta/2} = c_n^0 \left[-\beta + \frac{n}{\beta^*}\right];$$

$$c_n^2 = c_n^0 \left[\frac{\beta^2}{\sqrt{2}} - \frac{\beta}{\beta^*} n\sqrt{2} + \frac{n(n-1)}{\beta^{*2}\sqrt{2}}\right].$$

Wie oben erwähnt, ist $c_n^{\nu*} c_n^\nu$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im ν-ten Eigenzustand von W n Mesonen in der Umgebung des Nukleons vorhanden sind. Uns interessiert vor allem die mittlere Zahl von Mesonen im ν-ten Eigenzustand. Diese Zahl ist natürlich gegeben durch

$$\overline{n}_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n^{\nu*} \cdot c_n^\nu; \tag{9}$$

speziell erhält man

$$\overline{n}_0 = \beta^*\beta; \; \overline{n}_1 = \overline{n}_0 + 1; \; \overline{n}_2 = \overline{n}_0 + 2 \quad \text{usw.},$$

d. h. die mittlere Zahl der Mesonen in der das Nukleon umgebenden Mesonenwolke ist im ersten angeregten Zustand um 1, im zweiten um 2 usw. größer als im Grundzustand. Die Energie dieser Zustände liegt nach (6) um $\overline{W}$, $2\,\overline{W}$ usw. über der Energie des Grundzustandes.

Zur Berechnung der für die Lösung wesentlichen Größen $\overline{W}$ und β' nach (5a, b) ist wesentlich die Kenntnis der Funktion $\varphi(\mathfrak{k})$. Diese Funktion wird wiederum aus einem Variationsproblem gewonnen, und zwar ist $\varphi(\mathfrak{k})$ so zu bestimmen, daß $\overline{W}_\nu$ in (6) extremal wird. Allerdings muß φ so variiert werden, daß die Bedingung

[5] Es werden also beliebig viele Mesonen, aber nur 1 Nukleon zugelassen.

$$\sum_{\mathfrak{k}} \varphi^*(\mathfrak{k})\, \varphi(\mathfrak{k}) = 1 \tag{10}$$

stets erfüllt bleibt. Die Variation von W_ν liefert dann unter Beachtung von (10) die Gleichung

$$\varphi_\nu(\mathfrak{k}) = -\beta \cdot g \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathfrak{k}}}\right)^{1/2} \frac{F(-\mathfrak{k})}{\hbar\,\omega_{\mathfrak{k}}(\beta^*\beta + \nu) + \zeta}. \tag{11}$$

ζ ist ein Lagrange-Parameter, der so zu wählen ist, daß (10) erfüllt wird. Die Ermittlung von ζ gestaltet sich recht umständlich, vor allem weil in β nochmals φ und damit ζ enthalten ist. Zur Bestimmung von ζ muß also ein System von drei Gln. für die drei Unbekannten ζ, $\overline{W}$, β' gleichzeitig gelöst werden. Dieses System ist recht unbequem; wir werden es in § 5 aufschreiben und etwas diskutieren. Im Augenblick aber ersetzen wir, um mit einfachen Mitteln weiterrechnen zu können, (11) durch die Näherung

$$\varphi_\nu(\mathfrak{k}) = \varphi(\mathfrak{k}) = K \cdot \frac{F(-\mathfrak{k})}{\omega_{\mathfrak{k}}^{3/2}}, \tag{12}$$

die wir auch schon in M benutzt haben. K ist eine Normierungskonstante. Mit (12) erhält man

$$\beta' = -g\, K^* (\hbar c^2/2V\omega_{\mathfrak{k}})^{1/2} \sum_{\mathfrak{k}} F^*(\mathfrak{k})\, F(\mathfrak{k})/\omega_{\mathfrak{k}}^2; \tag{13}$$

$$\overline{W} = \hbar\, K^* K \sum_{\mathfrak{k}} F^*(\mathfrak{k})\, F(\mathfrak{k})/\omega_{\mathfrak{k}}^2; \tag{14}$$

$$1/K^* K = \sum_{\mathfrak{k}} F^* F/\omega^3. \tag{15}$$

Wie man sieht, hängt das Energiespektrum (6) und damit das uns besonders interessierende Massenspektrum der angeregten Nukleonen wesentlich von der Funktion $F(\mathfrak{k})$ ab, die in (5b) definiert wurde und der wir uns jetzt zuwenden wollen.

§ 3. Spezialisierung auf ein bestimmtes Nukleonen-Wellenpaket

$F(\mathfrak{k})$ ist gemäß (5b) durch die Koeffizienten $a_{\mathfrak{p}}$ bestimmt; $a_{\mathfrak{p}}^*\, a_{\mathfrak{p}}$ stellt, wie oben erwähnt, die Wahrscheinlichkeit dafür dar, daß das Nukleon den Impuls $\hbar\mathfrak{p}$ besitzt. Am meisten befriedigend wäre es natürlich im Rahmen dieser Theorie, wenn man auch die $a_{\mathfrak{p}}$ durch eine Extremalforderung an W_ν festlegen würde. Darauf möchten wir jedoch im Augenblick verzichten und $a_{\mathfrak{p}}$ als fest vorgegeben betrachten. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, $a_{\mathfrak{p}}$ sei kugelsymmetrisch um $\mathfrak{p} = 0$, und zwar konstant im Inneren einer Kugel vom Radius $L/2$, außerhalb der Kugel sei $a_{\mathfrak{p}} = 0$. In Formeln:

$$a_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \text{const für } |\mathfrak{p}| \leq L/2 \\ 0 \quad \text{für } |\mathfrak{p}| > L/2 \end{cases}. \tag{16}$$

Beachtet man die Normierung $1 = \sum_{\mathfrak{p}} a_{\mathfrak{p}}^*\, a_{\mathfrak{p}}$, dann folgt aus (16) und (5b)

$$F(\mathfrak{k}) = \sum_{\mathfrak{p}} a_{\mathfrak{p}}^*\, a_{\mathfrak{p}-\mathfrak{k}} = \begin{cases} 1 - 3\,k/2\,L + k^3/2\,L^3 & \text{für } k \leq L \\ 0 & \text{für } k \geq L \end{cases} \tag{17}$$

mit $k = |\mathfrak{k}|$.

Bei der Auswertung von (13) bis (15) mit (17) ist es zweckmäßig, das Normierungsvolumen V so groß zu wählen, daß die Summen im $\mathfrak{k}$-Raum durch Integrale ersetzt werden können. Es treten hierbei zwei Integrale auf:

$$I(\lambda) = \int_0^1 \frac{(1 - 3/2\,x + 1/2\,x^3)^2 \cdot x^2\, d\,x}{(x^2 + \lambda)^{3/2}} \quad \text{und} \tag{18}$$

$$J(\lambda) = \int_0^1 \frac{(1 - 3/2\,x + 1/2\,x^3)^2\, x^2\, d\,x}{(x^2 + \lambda)}$$

mit $x = k/L$ und $\lambda = \mu^2/L^2$. Und zwar ist

$$\beta' = -g\, K^* \left(\frac{\hbar c^2}{2V}\right)^{1/2} \cdot \frac{4\,\pi V \cdot L}{(2\pi)^2\, c^2} \cdot J;$$

$$\overline{W} = \hbar\, K^* K \cdot \frac{4\,\pi V \cdot L}{(2\,\pi)^3 \cdot c^2} \cdot J; \qquad \frac{1}{K^* K} = \frac{4\,\pi V}{(2\,\pi)^3\, c^3} \cdot J.$$

Die Integrale I und J können geschlossen für beliebiges λ berechnet werden, uns genügt hier jedoch eine graphische Abschätzung beider Größen für ein festes λ. Wie man sieht, ist durch $\lambda = (\mu/L)^2$ die Ausdehnung des Wellenpaketes des Nukleons im Impulsraum festgelegt, damit aber nach der Unschärferelation auch die Ausdehnung R desselben Wellenpaketes im Ortsraum. Und zwar ist $LR \approx 1$. Es liegt natürlich nahe, R von der Größenordnung 10^{-13} cm zu wählen. Es sei in dieser Abschätzung der Einfachheit halber $R \approx \mu^{-1} = 1{,}44 \cdot 10^{-13}$ cm (für π-Mesonen ist $\mu = 6{,}95 \cdot 10^{12}\ \text{cm}^{-1}$) gesetzt; dann folgt $L \approx \mu$. Wir nehmen genauer $L = \mu$, also $\lambda = 1$ an[6]. Es ergibt sich damit

$$I(1) = 0{,}010; \; J(1) = 0{,}011.$$

Für die physikalisch wesentlichen Größen folgt mit diesen Zahlenwerten[7]

[6] Für das Resultat ist, wie (18) zeigt, nur die Größenordnung von λ wichtig, solange man sich mit der Größenordnung von I und J begnügt.

Anm. b. d. Korr.: Inzwischen konnte Verf. durch ein Variationsverfahren auch L festlegen und erhielt (für die spezielle Kopplungskonstante, $g^2/\hbar c \approx 26$) als optimalen Wert $L \approx 8{,}2\,\mu$, was die hier erhaltenen Resultate nicht wesentlich ändert. Vgl. Ann. Phys., Lpz., im Druck.

[7] Mit $\mu = mc/\hbar$; m = Masse der π-Mesonen.

$$\overline{W} = \hbar c \mu \cdot \frac{J}{I} = 1{,}1 \cdot m c^2; \tag{19}$$

$$\beta^* \beta = \frac{\beta'^* \beta'}{\overline{W}^2} = \frac{g^2}{\hbar c} \frac{J}{(2\pi)^2} = \frac{g^2}{\hbar c} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-4}. \tag{20}$$

$g^2/\hbar c$ ist die dimensionslose Konstante, welche die Stärke der Kopplung des Nukleonen- an das Mesonenfeld mißt. Man vermutet, daß $g^2/\hbar c$ zwischen 1 und 10 liegt. Das bedeutet, daß die mittlere Zahl der Mesonen im Grundzustand gemäß (9) sehr klein wird. Größtes Interesse hat natürlich unser Resultat (19) für $\overline{W}$, welches besagt, daß die Energie-Eigenwerte unseres Systems um den Faktor 1,1 weiter voneinander entfernt sind als der Ruh-Energie eines π-Mesons entspricht; die Massendifferenzen zwischen benachbarten angeregten Zuständen der Nukleonen werden in diesem einfachen Modell also etwa 300 Elektronenmassen betragen. Tatsächlich bewegen sich diese Differenzen, wie aus den in der Einleitung mitgeteilten Angaben ersichtlich ist, zwischen 345 und 397 Elektronenmassen. In Anbetracht der teils groben Näherungen, welche wir eingeführt haben, darf man diese größenordnungsmäßige Übereinstimmung wohl als befriedigend bezeichnen und als Stütze für die Vermutung ansehen, daß die in dieser einfachen Modell-Theorie auftretenden angeregten Zustände der Nukleonen ein grobes Abbild der Hyperonen seien.

Leider muß diesem recht erfreulichen Resultat nun ein ebenso unerfreuliches Ergebnis an die Seite gestellt werden: Die Lebensdauer unserer Modell-Hyperonen wird viel zu klein! Wir wenden uns der Berechnung dieser Lebensdauer zu.

§ 4. Die Lebensdauer der Hyperonen

Es soll jetzt gezeigt werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein durch $\nu \neq 0$ in (6), (7) gekennzeichneter Zustand spontan in einen tieferen Zustand übergeht. Ausgangspunkt ist wieder der Hamilton-Operator H des Systems gemäß (2). Wir führen aber jetzt nicht die Näherung (3): $a_{\mathfrak{k}} = A \cdot \varphi(\mathfrak{k})$ ein, sondern schreiben:

$$a_{\mathfrak{k}} = A\, \varphi(\mathfrak{k}) + B_{\mathfrak{k}}. \tag{21}$$

Hier soll $\varphi(\mathfrak{k})$ die in den vorigen Paragraphen erläuterte Bedeutung haben, also der Teil $A\varphi$ von $a_{\mathfrak{k}}$ sich auf die gebundenen Mesonen beziehen. $B_{\mathfrak{k}}$ aber soll der Vernichtungsoperator eines freien Mesons vom Impuls $\hbar\mathfrak{k}$ sein. Durch den Ansatz[8] (21) gestatten wir also dem Nukleon, freie Mesonen zu emittieren und zu absorbieren. Mit (21) erhält H nach (2) die Form:

$$H = H_{\text{geb}} + H_{\text{fr}} + \overline{H}, \tag{22}$$

wo H_{geb} genau der Operator ist, den man aus (2) mit (3) erhält. Ferner gilt:

$$H_{\text{fr}} = \hbar \sum_{\mathfrak{k}} \omega_{\mathfrak{k}} B^*_{\mathfrak{k}} B_{\mathfrak{k}}; \tag{22a}$$

$$\overline{H} = \sum_{\mathfrak{k}} [B_{\mathfrak{k}} (\hbar\, \omega_{\mathfrak{k}}\, \varphi^*(\mathfrak{k}) A^* + f(\mathfrak{k})) + B_{\mathfrak{k}}^* (\hbar \omega_{\mathfrak{k}} \varphi(\mathfrak{k}) A + f(-\mathfrak{k}))]; \tag{22b}$$

$f(\mathfrak{k})$ ist der in (2c) definierte Operator. Ersichtlich hat H_{fr} die Gestalt des Hamilton-Operators eines freien Mesonfeldes, während $\overline{H}$ u. a. Prozesse enthält, bei denen ein Meson emittiert wird, während das Modell-Hyperon vom Zustand $\nu = \nu_{\text{a}}$ zum Zustand $\nu = \nu_{\text{e}} < \nu_{\text{a}}$ übergeht. Die letzte Behauptung muß natürlich bewiesen werden, indem man das Matrixelement[9]

$$H^{(\mathfrak{k})}_{\nu_{\text{e}},\nu_{\text{a}}} = \langle \Psi^{\nu_{\text{e}}}, [\hbar\, \omega_{\mathfrak{k}}\, \varphi(\mathfrak{k})\, A + f(-\mathfrak{k})]\, \Psi^{\nu_{\text{a}}} \rangle \tag{23}$$

berechnet, das dem Übergang vom Zustand ν_{a} zu ν_{e} entspricht. $\hbar\mathfrak{k}$ ist der Impuls des gleichzeitig emittierten Mesons, der so zu wählen ist, daß der Energiesatz $\hbar\omega_{\mathfrak{k}} + W_{\nu_{\text{e}}} = W_{\nu_{\text{a}}}$ erfüllt ist, also

$$\hbar\, \omega_{\mathfrak{k}} = \overline{W} (\nu_{\text{a}} - \nu_{\text{e}}) \tag{24}$$

gilt. Mit der Abkürzung $\Theta = \sum_{\mathfrak{p}} a_{\mathfrak{p}} \cdot \Theta_{\mathfrak{p}}$ lautet (23) genauer:

$$H^{(\mathfrak{k})}_{\nu_{\text{e}},\nu_{\text{a}}} = \sum c^{\nu_{\text{e}}*}_{n-1} \sqrt{n}\, c^{\nu_{\text{a}}}_{n} \cdot \hbar\, \omega_{\mathfrak{k}}\, \varphi(\mathfrak{k}) \langle \Theta, \Theta \rangle + \sum_{n=0}^{\infty} c^{\nu_{\text{e}}*}_{n} c^{\nu_{\text{a}}}_{n} \langle \Theta, f(-\mathfrak{k})\, \Theta \rangle.$$

Hier ist natürlich $\langle \Theta, \Theta \rangle = 1$, während nach obigem $\sum_n c^{\nu_{\text{e}}*}_{n} c^{\nu_{\text{a}}}_{n} = 0$ wird, da $\nu_{\text{e}} \neq \nu_{\text{a}}$ sein soll. Die im ersten Summanden auftretenden Summen

$$S^{\nu_{\text{e}},\nu_{\text{a}}} = \sum_n c^{\nu_{\text{e}}*}_{n-1} \sqrt{n}\, c^{\nu_{\text{a}}}_{n}$$

[8] Dieser Ansatz wird z. B. auch zur Behandlung der Streuung eines Mesons am Nukleon benutzt von Z. Maki, M. Sato u. S. Tomonaga, Progr. Theor. Phys. **9**, 607 [1953].

[9] In der Bezeichnung von (4), (7) ist:

$$\Psi^{\nu} = \sum_n \sum_{\mathfrak{p}} c^{\nu}_{n}\, a_{\mathfrak{p}}\, \Phi_n\, \Theta_{\mathfrak{p}}.$$

lassen sich mit (7) im Prinzip für jedes ν_e, ν_a streng berechnen. Die einfachsten dieser Summen haben die Werte[10]

$$S^{0,1} = -\frac{\beta}{\beta^*}\ ; S^{0,2} = 0\ ;$$

$$S^{1,2} = \frac{\beta}{\sqrt{2}\,\beta^*}\,[2 + 3\,\beta^*\beta + 3\,(\beta^*\beta)^2].$$

Es ist zu vermuten, daß allgemein gilt: $S^{\nu_e, \nu_a} = 0$, falls $\nu_e \neq \nu_a \pm 1$. (Diese „Auswahlregel" wird nach der Einleitung vom Hyperon Σ erfüllt, von Ω aber verletzt.) In dem Ausdruck

$$H^{(\mathfrak{k})}_{\nu_e, \nu_a} = S^{\nu_e, \nu_a} \cdot \hbar\,\omega_{\mathfrak{k}}\,\varphi(\mathfrak{k})$$

für das Matrixelement sind also die S in den uns interessierenden Fällen praktisch vom Betrage 1 (oder Null), wir können demnach ohne wesentlichen Fehler unter den früheren Voraussetzungen auch schreiben

$$|H^{(\mathfrak{k})}_{\nu_e, \nu_a}|^2 = \hbar^2 \omega_{\mathfrak{k}}{}^2 |\varphi(\mathfrak{k})|^2 \tag{25}$$

$$= \frac{(2\,\pi)^2\,c^3\,\hbar^2}{2V}\,\frac{F^*(\mathfrak{k})\,F(\mathfrak{k})}{\omega_{\mathfrak{k}}} \cdot I.$$

I ist das in (18) eingeführte Integral.

Der Betrag des Matrixelementes hängt bekanntlich sehr einfach mit der Übergangswahrscheinlichkeit w pro Zeiteinheit zusammen[11]

$$w = \frac{2\,\pi}{\hbar}\,\varrho\,(\mathfrak{k})\;|H^{(\mathfrak{k})}_{\nu_e, \nu_a}|^2.$$

Hier ist $\varrho(\mathfrak{k})$ die Energiedichte für das emittierte Teilchen. Man überlegt sich leicht, daß

$$\varrho(\mathfrak{k}) = \frac{2V\,k\,(k^2 + \mu^2)^{1/2}}{(2\,\pi)^2 \cdot c \cdot \hbar} = \frac{2V\,k \cdot \omega_{\mathfrak{k}}}{(2\pi)^2\,c^2\hbar}.$$

Also ergibt sich

$$w = 2\pi\,c\,k \cdot F^*(\mathfrak{k})\,F(\mathfrak{k}) \cdot I. \tag{26}$$

Jetzt muß die Wellenzahl k des emittierten Mesons noch so bestimmt werden, daß der Energiesatz (24) erfüllt ist. Hierzu muß wieder ein spezielles Wellenpaket $a_{\mathfrak{p}}$ für das Nukleon gewählt werden; wir schließen uns der im § 3 getroffenen Wahl an. Dabei ergab sich ja [vgl. (19)] der Wert $\overline{W} = 1{,}1 \cdot \mu c \hbar$, also für $\nu_a - \nu_e = 1$ auch $\omega = 1{,}1 \mu c$. Das bedeutet $k = 0{,}47\ \mu$, $F\ (0{,}47\ \mu) = 0{,}35$ und schließlich

$$w = 3{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot c\,\mu.$$

Nimmt man, wie in § 3, Mesonen von 270-facher Elektronenmasse an, so ist $c\,\mu = 2{,}08 \cdot 10^{23}\ \mathrm{sec}^{-1}$; man erhält also für die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit w

$$w = 7{,}5 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{sec}^{-1}. \tag{27}$$

Unser Modell-Hyperon Λ° wird also nur eine mittlere Lebensdauer von $\tau = 1/w = 0{,}13 \cdot 10^{-20}$ sec besitzen, während in Wirklichkeit ein τ von $3 \cdot 10^{-10}$ sec beobachtet ist.

Diese Diskrepanz um elf Größenordnungen ist natürlich eine sehr unangenehme Seite der Theorie. Wenn es nicht gelingt, die theoretische Lebensdauer der Hyperonen durch Verfeinerungen oder geeignete Veränderungen des Modells wesentlich zu erhöhen, muß die Theorie es sicher aufgeben, die Hyperonen in der skizzierten Weise als angeregte Nukleonen zu interpretieren.

§ 6. Schlußbemerkungen

Angesichts des Mißerfolges der obigen Theorie bei der Berechnung der Lebensdauer der Hyperonen wird man natürlich zunächst überlegen, ob etwa im Laufe der Rechnungen bedenkliche Vereinfachungen eingeführt wurden, welche über die Annahmen (3) bzw. (21) der Tomonaga-Näherung hinausgehen.

Tatsächlich sieht es zunächst ganz so aus, als sei eine solche Vereinfachung eingeführt worden. Denn es ist auf den ersten Blick sehr merkwürdig, daß die beiden wichtigsten Größen $\overline{W}$ gemäß (14) oder (19) und w nach (26) nicht mehr von der Kopplungskonstanten g abhängen. Man vermutet natürlich zunächst, daß hieran die Näherung (12) schuld sei.

Es läßt sich aber zeigen, daß $\overline{W}$ auch nach (11) von g unabhängig ist. Um dies einzusehen, beschränken wir uns zunächst auf $\nu = 0$. Dann lautet (11) auch:

$$\varphi(\mathfrak{k}) = -\frac{g\overline{W}}{\beta'^*}\left(\frac{\hbar\,c^2}{2V\,\omega_{\mathfrak{k}}}\right)^{1/2}\frac{F(-\mathfrak{k})}{\hbar\omega_{\mathfrak{k}} + \xi}, \tag{11a}$$

wo $\xi = \zeta \cdot W^2/\beta'^*\,\beta'$ eingeführt wurde. Schreibt man noch $\alpha = \beta'/g$, $\alpha^* = \beta'^*/g$, so können die drei Unbekannten α, $\overline{W}$, ξ ermittelt werden aus dem Gleichungssystem:

$$1 = \frac{\hbar\,c^2\,\overline{W}^2}{2V\,\alpha^*\alpha}\sum_{\mathfrak{k}}\frac{F^*(\mathfrak{k})\,F(\mathfrak{k})}{\omega_{\mathfrak{k}}\,(\hbar\,\omega_{\mathfrak{k}} + \xi)^2}\,;$$

$$1 = \frac{\hbar^2\,c^2\,\overline{W}}{2V\,\alpha^*\alpha}\sum_{\mathfrak{k}}\frac{F^*(\mathfrak{k})\,F(\mathfrak{k})}{(\hbar\,\omega_{\mathfrak{k}} + \xi)^2}\,; \tag{28}$$

$$1 = \frac{\hbar\,c^2\,\overline{W}}{2V\,\alpha^2}\sum_{\mathfrak{k}}\frac{F^*(\mathfrak{k})\,F(\mathfrak{k})}{\omega_{\mathfrak{k}}\,(\hbar\omega_{\mathfrak{k}} + \xi)}.$$

[10] Man benutzt bei Berechnung der S^{ν_e, ν_a} mit Vorteil die Formel:

$$\sum_n n^\nu\,\frac{x^n}{n!} = \left(x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^{\nu-1}(x\,e^x)$$

(ν ganz und > 0).

[11] Die Lebensdauer τ ist einfach $\tau = 1/w$.

Da in diesem System nirgends mehr g vorkommt, sind auch die Lösungen $\alpha, \overline{W}, \xi$ von g unabhängig. Wohl aber hängen jetzt diese Lösungen von ν ab; in (28) war ja $\nu = 0$ gesetzt worden. φ hängt also, wie man an (11a) erkennt, nicht von g ab, wohl aber von ν. Es ist möglich, daß auf diesem indirekten Wege eine g-Abhängigkeit in die eben berechnete Übergangswahrscheinlichkeit w hineinkommt; man müßte vor allem die Summe $S^{0,1}$ nochmals berechnen unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die β im allgemeinen von ν abhängen. — Es ist jedoch sehr unwahrscheinlich, daß durch diese Korrektur ν um mehrere Zehnerpotenzen geändert wird. Deshalb wurde das recht unangenehme System (28) nicht weiter analysiert[12]. Es sei nur noch bemerkt, daß eine wesentliche Änderung von $\overline{W}$ bei Berechnung aus (28) gegenüber dem Wert (19) nicht zu erwarten ist; dies schließt man aus der Beziehung

$$\overline{W} = \sum_{\mathfrak{k}} \frac{F^*F}{(\hbar\,\omega + \xi)^2} \left[\sum_{\mathfrak{k}} \frac{F^*F}{\hbar\,\omega\,(\hbar\,\omega + \xi)^2} \right]^{-1},$$

die in (28) enthalten ist.

Möglicherweise liefert obige Theorie deshalb eine viel zu kleine Lebensdauer, weil sie wesentliche Punkte vernachlässigt hat: Elektrische Ladung und Spin der Nukleonen und Mesonen fehlen ja beim Ansatz (1) völlig. Es ist zu vermuten, daß diese neuen Freiheitsgrade zu neuen Auswahlregeln für Übergänge zwischen den Nukleon-Isobaren-Zuständen führen. Diese aber könnten u. U. einige metastabile Niveaus schaffen, welche man vielleicht als Hyperonen-Zustände deuten dürfte. Weitere Untersuchungen über diese Fragen sind im Gange.

[12] Übrigens erhält man durch Lösung von (28) nur das $\varphi(\mathfrak{k})$, welches das tiefste Minimum von W_0 liefert. Es gibt aber i. allg. noch weitere Lösungen φ desselben Variationsproblems, die ebenfalls angeregte Zustände schaffen können. Mit diesen Niveaus sollte man sich vielleicht auch einmal befassen.

Das Pol-Dipol-Teilchen im Gravitationsfeld und elektromagnetischen Feld

Von A. Papapetrou und W. Urich

Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin und
Lehrstuhl für Theoretische Physik der Universität Tübingen

(Z. Naturforschg. **10a**, 109—117 [1955]; eingegangen am 23. Dezember 1954)

Die Bewegungsgleichungen für ein Pol-Dipol-Teilchen unter dem Einfluß vorgegebener Gravitations- und elektromagnetischer Kräfte werden aufgestellt und im Lagrange- sowie im Hamilton-Formalismus diskutiert. Es zeigt sich, daß die vom gravitationsfreien Fall bekannten Züge der Theorie des Pol-Dipol-Teilchens im wesentlichen erhalten bleiben; dies gilt insbesondere auch für die Eigenschaften der mit den Analoga der Dirac-Matrizen γ^{μ} gebildeten klassischen Poisson-Klammern.

§ 1. Einleitung

Der Begriff des Pol-Dipol-Teilchens fand an zwei ganz verschiedenen Stellen Eingang in die Physik: Einmal, als es sich darum handelte, im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie der Dirac-Gleichung eine möglichst eng korrespondierende klassische Gleichung an die Seite zu stellen[1], zum anderen — im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie — bei der Untersuchung der Bewegung von Probeteilchen in einem Gravitationsfeld[2]. Entsprechend der verschiedenen Zielsetzung unterschieden sich auch die Methoden der beiden Richtungen. Im folgenden soll der Nachweis erbracht werden, daß die Gesichtspunkte und Resultate der erstgenannten Richtung verallgemeinerungsfähig sind: Sie bleiben im wesentlichen erhalten, wenn man neben dem Einfluß des elektromagnetischen Feldes noch den eines vorgegebenen Gravitationsfeldes berücksichtigt.

[1] M. Mathisson, Acta Phys. Polon. **6**, 167 [1937]; J. Lubanski, Acta Phys. Polon. **6**, 356 [1937]; H. Hönl u. A. Papapetrou, Z. Phys. **112**, 512; **114**, 478 [1939]; **116**, 153 [1940]; F. Bopp, Z. Naturforschg. **3a**, 564 [1948]; Z. angew. Phys. **1**, 387 [1949]; F. Bopp u. F. L. Bauer, Z. Naturforschg. **4a**, 611 [1949]. Ein ausführliches Literaturverzeichnis für das ganze Gebiet findet sich in dem Bericht von H. Hönl, Ergebn. exakt. Naturwiss. **26**, 291 [1952].

[2] A. Papapetrou, Proc. Roy. Soc. (A) **209**, 248 [1951]; E. Corinaldesi u. A. Papapetrou, Proc. Roy. Soc (A) **209**, 259 [1951].